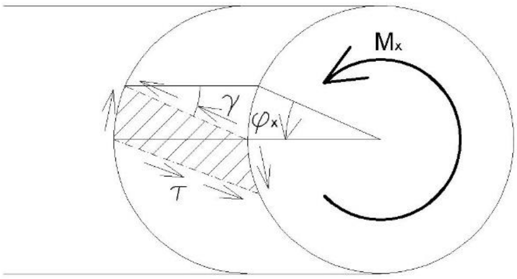
Volné kroucení prutů - teorie



Základní vztahy

Diferenciální podmínka rovnováhy pro namáhání prutu kroucením je

$$M_x' = -m_x$$

kde

M$_x$ je kroutící moment (vnitřní síla)

m$_x$ je spojité momentové zatížení kolem osy x

Poměrný úhel zkroucení (vzájemné natočení dvou průřezů na jednotku délky) je dán fyzikální podmínkou

$$\theta_x = \frac{M_x}{GI_t}$$

kde

G je modul pružnosti ve smyku (materiálová charakteristika)

I$_t$ je moment setrvačnosti průřezu v kroucení (průřezová charakteristika)

Vztah mezi poměrným úhlem zkroucení a pootočením φ_x je dán geometrickou podmínkou

$$\phi_x' = \theta_x$$

Integrací vztahu se získá

$$\phi_x = \int \theta_x \, dx + C$$

Integrační konstantu *C* je možné určit z okrajové podmínky a tou je známé pootočení pro bod a. Pomocí tohoto známého posunu v bodě *a* je možno vyjádřit pootočení v libovolném bodě *b*.

$$\phi_b = \phi_a + \int_a^b \theta_x dx = \phi_a + \int_a^b \frac{M_t}{GI_t} dx$$

Pro veličiny M_x, G a I_t, konstantní v jednotlivých částech prutu, přejde integrál v sumační vyjádření

$$\phi_b = \phi_a + \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{x,i} L_i}{G_i I_{t,i}}$$

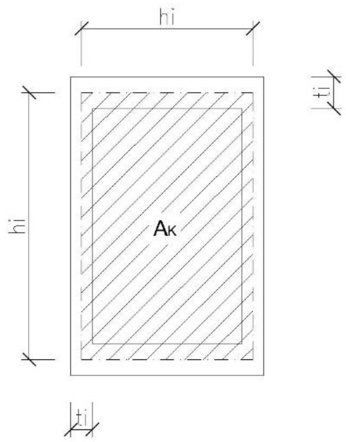
Kroutící moment způsobuje v průřezu smykové napětí. Jeho rozložení po průřezu je poměrně odlišné pro různé typy průřezů. Obecně lze definovat maximální smykové napětí na průřezu.

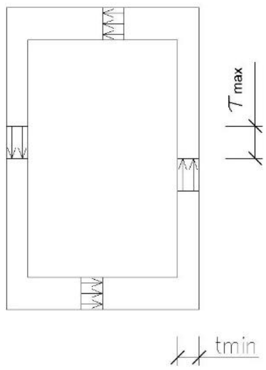
$$\boldsymbol{\tau \frac{M_x}{W_{t,max}}}$$

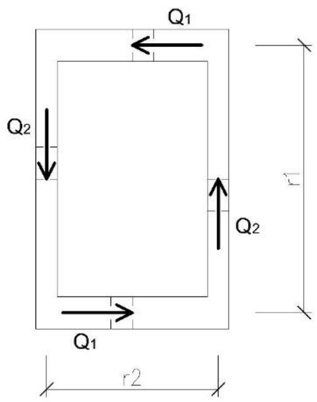
kde

W_t je modul průřezu v kroucení (průřezová charakteristika)

Průřezové charakteristiky pro tenkostěnný uzavřený průřez







Předpokládá se konstantní průběh smykového napětí po tloušťce stěny a konstantní smykový tok tloušťkou stěny. Tzn., že v nejtenčí stěně je největší napětí.

Moment setrvačnosti v kroucení je dán vztahem

$$I_t = \frac{4A_k^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} = \frac{4A_k^2}{\sum \frac{h_i}{t_i}}$$

A_k plocha vymezená střednicemi jednotlivých stěn průřezu

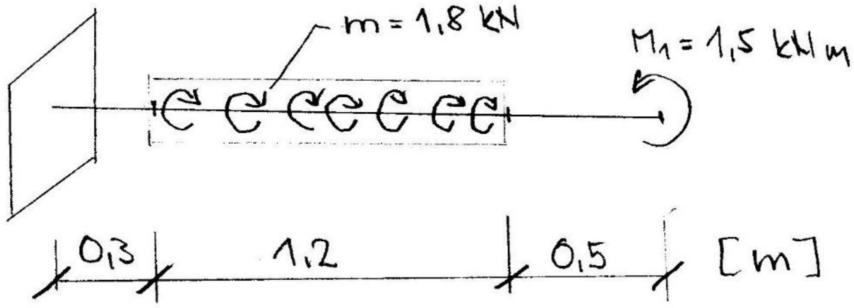
h_i délky jednotlivých střednic stěn průřezu

t_i tloušťky jednotlivých střednic stěn průřezu

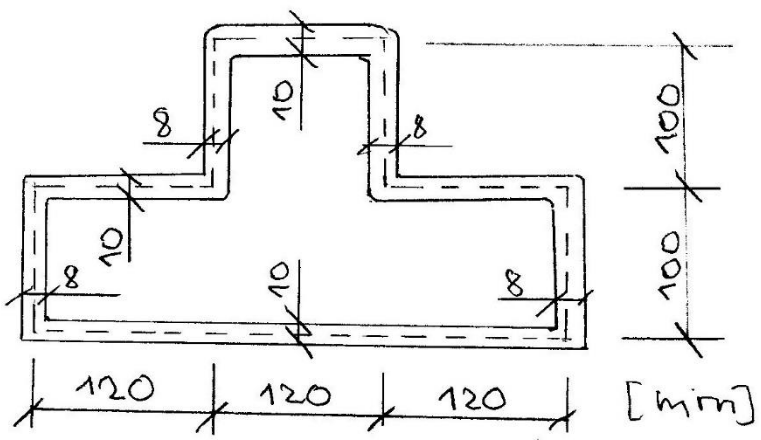
Modul průřezu v kroucení je dán vztahem $W_t = 2A_k t_{min}$

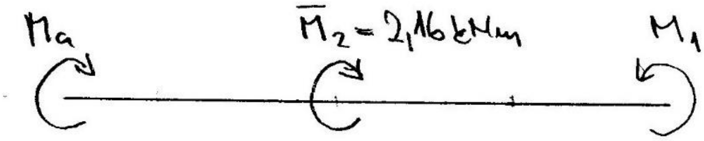
Příklad

Konzola je zatížena krouticím zatížením dle obrázku.



Průřez nosníku je tenkostěnný uzavřený dle obrázku a je konstantní po celé délce nosníku.





Modul pružnosti ve smyku je $G = 80GPa$ a je konstantní po celé délce nosníku.

Určete maximální smykové napětí od volného kroucení na nosníku.

Vykreslete průběh pootočení φ_c po délce nosníku.

Řešení

a) Výpočet průřezových charakteristik

Veličinu A_k určíme jako plochu vymezenou střednicemi jednotlivých stěn průřezu

$A_k = 0{,}1.0{,}12.4 = 0{,}048\ m^2$

Integrál po uzavřené křivce jdoucí po střednici jednotlivých stěn $\oint \frac{ds}{t(s)}$ (bezrozměrná veličina) má ve jmenovateli tloušťku stěn, která je funkcí střednice. Pokud je tato tloušťka pro jednotlivé stěny konstantní, můžeme ho nahradit sumou zlomků $\frac{h_i}{t_i}$ pro jednotlivé stěny, kde h_i je délka stěny a t_i je tloušťka stěny. V našem případě je celková délka vodorovných stěn 2. 0,36 m a celková délka svislých stěn 2. 0,2 m.

$$\oint \frac{ds}{t(s)} = \sum \frac{h_i}{t_i} = 2\frac{0{,}36}{0{,}01} + 2\frac{0{,}2}{0{,}008} = 122$$

Pomocí modulu průřezu v kroucení W_t určujeme maximální smykové napětí. To u uzavřených průřezů nastává v místě minimální tloušťky. Proto se ve vzorci pro využije právě minimální tloušťka

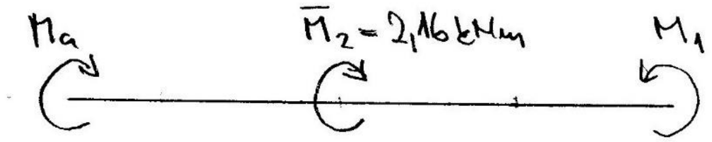
$$W_t = 2.A_k.t_{min} = 2.\,0{,}048\,.\,0{,}008 = 7{,}68\,.\,10^{-4}\,m^3$$

Dosazením připravených veličin získáme i moment setrvačnosti v kroucení

$$I_t = \frac{4\,A_k^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} = \frac{4\,.\,0{,}048^2}{122} = 7{,}5541\,.\,10^{-5} m^4$$

b) Průběh krouticích momentů

Spojité momentové napětí nahradíme náhradním břemenem.

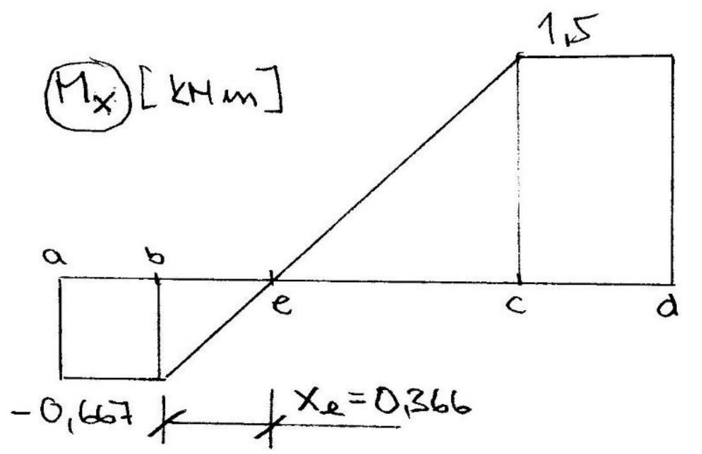


Z momentové podmínky k ose x určíme reakci M_a.

$$M_a + \overline{M}_2 - M_1 = 0$$

Z diferenciální podmínky rovnováhy $M'_x = -m_x$ plyne, že v úsecích, kde je m_x nulové, kroutící moment je konstantní a v úsecích s konstantním m_x je kroutící moment lineární. K vykreslení průběhů kroutících momentů nám postačí hodnota v bodech a a d. Hodnota v bodě a odpovídá reakci M_a, hodnota $M_d{'}$ odpovídá hodnotě momentu M_1. Vzdálenost bodu e s nulovým krouticím momentem od bodu b nám pomůže určit krajní hodnota úseku M_b a hodnota spojitého zatížení v tomto úseku m_x.

$$x_e = \frac{|M_b|}{m_x} = \frac{0{,}66}{1{,}8} = 0{,}366m$$



c) Výpočet extrémního smykového napětí

Z průběhu je zřejmé, že extrémní hodnota kroutícího momentu je v úseku c-d $M_{max} = M_d$. Vzhledem ke konstantnímu modulu průřezu v kroucení pro celý nosník budeme hledat extrémní smykové napětí v tomto úseku.

$$\tau_{max} = \frac{M_{max}}{W_t} = \frac{1{,}5 \, . \, 10^3}{7{,}68 \, . \, 10^{-4}} = 1{,}953. \, 10^6 = 1{,}953 \; MPa$$

Extrémní hodnota smykového napětí je v úseku c-d na nosníku a ve stěnách průřezu o tloušťce $0{,}008 \; m$ tj. ve v jeho svislých částech.

d) Průběhy pootočení po délce nosníku

Pro potočení platí vztah

$$\varphi_b = \varphi_a + \int_a^b \frac{M_x}{G.I_t} dx$$

V případě úseků s konstantními veličinami M_x , G a I_t lze integrál nahradit sumou

$$\sum \frac{M_{x,i} L_i}{G_i . I_{t,i}}$$

kde L_i jsou délky jednotlivých úseků.

Bod a je podepřený, má tedy nulové pootočení. Od něj budeme pokračovat ve výpočtu hodnot pro další body. V úseku a-b je krouticí moment konstantní, můžeme tedy hodnotu v bodě b spočítat následujícím způsobem

$$\varphi_b = \varphi_a + \frac{M_a L_{ab}}{G.I_t} = 0 + \frac{-0{,}66 \, . \, 10^3 \, . \, 0{,}3}{80 \, . \, 10^9 . \, 7{,}5541 \, . \, 10^{-5}} = -3{,}2763 \, . \, 10^{-5}$$

V úseku b-c je funkce kroutícího momentu lineární. Můžeme si ji vyjádřit jako funkci x s počátkem v bodě b.

$$M(x) = (-0{,}66 + 1{,}8\text{x}). \, 10^3$$

A tuto funkci použijeme pro výpočet pootočení v bodě c

$$\varphi_c = \varphi_b + \int_b^c \frac{M_x}{G.I_t} dx = -3{,}2763\ .\ 10^{-5} + \int_0^{1,2} \frac{(-0{,}66 + 1{,}8x).\ 10^3}{80\ .\ 10^9 . 7{,}5541\ .\ 10^{-5}} dx = 5{,}0634.\ 10^{-5}$$

V posledním úseku c-d je funkce krouticího momentu konstantní

$$\varphi_c = \varphi_d + \frac{M_c L_{cd}}{G.I_t} = 5{,}0634.\ 10^{-5} + \frac{1{,}5\ .\ 10^3\ .0{,}5}{80\ .\ 10^9 . 7{,}5541\ .\ 10^{-5}} = 17{,}47\ .\ 10^{-5}$$

Zbývá dopočítat extrém funkce pootočení. Ten se nachází v místě nulové derivace funkce pootočení. Derivací funkce pootočení je funkce krouticího momentu. Extrém je tedy v bodě e. Využijeme hodnotu v bodě b a integrujeme v úseku b-e. Horní mez integrálu je tentokrát vzdálenost nulového bodu x_e.

$$\varphi_e = \varphi_b + \int_b^c \frac{M_x}{G.I_t} dx = -3{,}2763\ .\ 10^{-5} + \int_0^{0,366} \frac{(-0{,}66 + 1{,}8x).\ 10^3}{80\ .\ 10^9 . 7{,}5541\ .\ 10^{-5}} dx = -5{,}24.\ 10^{-5}$$

Při vykreslování vycházíme ze vztahu

$$\varphi'_x = \frac{M_x}{G.I_t}$$

Tzn. V úsecích s konstantním krouticím momentem je průběh pootočení lineární a v úsecích s lineárním krouticím momentem je průběhem pootočení kvadratická parabola.